第 36 講　1 の n 乗根

36　a，b を実数，i を虚数単位としたとき，$z=a+bi$ に対して，a を z の実部，b を z の虚部と呼ぶことにする．また，$\overline{z}$ を $a-bi$ と定める．

(1)　$x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，次の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(a)　$\omega^{2n}+\omega^n+1$

(b)　$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1$

(2)　$x^5=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，以下の各問いに答えよ．

(a)　$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ を示せ．

(b)　ω の実部を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　1 の n 乗根

36　n を自然数とし

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k},\qquad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1},\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

とおく．また，ω を $x^3-1=0$ の 1 でない解とする．

(1)　$S_0+S_1+S_2$ の値を求めよ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$ の値を求めよ．

(3)　$S_1=S_2$ が成り立つことを示せ．

(4)　S_0 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　2^{3n}　　㋑　3^n　　㋒　2^n

(2)　㋐　$(-1)^{n-1}$　　㋑　$(-1)^n$　　㋒　$(-2)^n$

(4)　㋐　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^{3n}+2(-1)^n\}$　　㋑　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^n+2(-1)^n\}$　　㋒　$S_0=\dfrac{1}{5}\{3^n+(-2)^n\}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 36 講　１の n 乗根

36　a，b を実数，i を虚数単位としたとき，$z=a+bi$ に対して，a を z の実部，b を z の虚部と呼ぶことにする．また，$\bar{z}$ を $a-bi$ と定める．

(1)　$x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，次の値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(a)　$\omega^{2n}+\omega^n+1$

(b)　$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1$

(2)　$x^5=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，以下の各問いに答えよ．

(a)　$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ を示せ．

(b)　ω の実部を求めよ．

【答】　(1) k を整数として (a) $\begin{cases} 3 & (n=3k) \\ 0 & (n\neq 3k) \end{cases}$　(b) $\begin{cases} 3 & (n=6k) \\ 2\omega+2 & (n=6k+1) \\ 0 & (n=6k+2,\ 6k+4) \\ 1 & (n=6k+3) \\ -2\omega & (n=6k+5) \end{cases}$

(2) (a) 略　(b) $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

【解答】

(1)　$x^3=1$ より $x^3-1=0$ ゆえに $(x-1)(x^2+x+1)=0$ となるので，ω は $x^2+x+1=0$ の虚数解の１つであるから　$\omega^2+\omega+1=0$　……①　となる．

また，ω は $x^3=1$ の解でもあるので　$\omega^3=1$　……②　となる．

以下 k を整数として，①と②を用いる．

(a)　$n=3k$ のとき，$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=(\omega^3)^{2k}+(\omega^3)^k+1=3$

$n=3k+1$ のとき，

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1=(\omega^3)^{2k}\omega^2+(\omega^3)^k\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

$n=3k+2$ のとき，

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1=(\omega^3)^{2k+1}\omega+(\omega^3)^k\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

以上より

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\begin{cases} \mathbf{3} & (\boldsymbol{n=3k}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n\neq 3k}) \end{cases}\quad (\boldsymbol{k}\ \textbf{は整数})$$

(b)　$(\omega+1)^{2n}=(-\omega^2)^{2n}=\omega^{4n}=(\omega^3)^n\omega^n=\omega^n$，$(\omega+1)^n=(-\omega^2)^n=(-1)^n\omega^{2n}$ より

$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1=\omega^n+(-1)^n\omega^{2n}+1=a_n$ とおくと，

$a_{n+6}-a_n=\{\omega^{n+6}+(-1)^{n+6}\omega^{2(n+6)}+1\}-\{\omega^n+(-1)^n\omega^{2n}+1\}=0$ より $a_{n+6}=a_n$

これと $a_1=\omega-\omega^2+1=2\omega+2$，$a_2=\omega^2+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=0$，

$a_3=\omega^3-\omega^6+1=1-1+1=1$，$a_4=\omega^4+\omega^8+1=\omega+\omega^2+1=0$，

$a_5=\omega^5-\omega^{10}+1=\omega^2-\omega+1=-2\omega$，$a_6=\omega^6+\omega^{12}+1=1+1+1=3$ より

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$(\omega+1)^{2n}+(\omega+1)^n+1=\begin{cases} \mathbf{3} & (\boldsymbol{n}=\mathbf{6}\boldsymbol{k}) \\ \mathbf{2}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{2} & (\boldsymbol{n}=\mathbf{6}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}=\mathbf{6}\boldsymbol{k}+\mathbf{2},\ \mathbf{6}\boldsymbol{k}+\mathbf{4}) \quad (\boldsymbol{k}\text{ は整数}) \\ \mathbf{1} & (\boldsymbol{n}=\mathbf{6}\boldsymbol{k}+\mathbf{3}) \\ -\mathbf{2}\boldsymbol{\omega} & (\boldsymbol{n}=\mathbf{6}\boldsymbol{k}+\mathbf{5}) \end{cases}$$

(2)　(a)　$x^5=1$ より $x^5-1=0$ ゆえに $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ となるので，ω は $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の虚数解の1つであるから $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ である.

(b)　a，b を実数として，$z=a+bi$ に対して $\overline{z}=a-bi$ より，$z+\overline{z}=2a$ となるので，複素数 z の実部は $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ となる．よって ω の実部は $\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2}$ である.

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ は $\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)=0$ と変形できるので，ω は $x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1=0$ もしくは $x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1=0$ の虚数解の1つであるが，どちらも実数係数の方程式であるので，これらの方程式が虚数解 ω をもつときには $\overline{\omega}$ も解となる.

解と係数の関係より $\omega+\overline{\omega}=-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ となるので，$\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2}=\dfrac{\mathbf{-1\pm\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$　これが求める ω の実部となる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第36講　1の n 乗根

36　n を自然数とし

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k},\qquad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1},\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

とおく．また，ω を $x^3-1=0$ の1でない解とする．

(1)　$S_0+S_1+S_2$ の値を求めよ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$ の値を求めよ．

(3)　$S_1=S_2$ が成り立つことを示せ．

(4)　S_0 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　2^{3n}　　㋑　3^n　　㋒　2^n

(2)　㋐　$(-1)^{n-1}$　　㋑　$(-1)^n$　　㋒　$(-2)^n$

(4)　㋐　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^{3n}+2(-1)^n\}$　㋑　$S_0=\dfrac{1}{3}\{2^n+2(-1)^n\}$　㋒　$S_0=\dfrac{1}{5}\{3^n+(-2)^n\}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑　(3) 略　(4) ㋐

【解答】

(1)　$S_0+S_1+S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k$ である．ここで

$$(1+x)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_kx^k$$

の両辺に $x=1$ を代入して $2^{3n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k$ を得る．

$$\therefore\quad S_0+S_1+S_2=\mathbf{2^{3n}}$$

(2)　$(1+x)^{3n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_kx^k$ の両辺に $x=\omega$ を代入して

$$(1+\omega)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$$

を得る．ここで $\omega^2+\omega+1=0$ より

$$1+\omega=-\omega^2$$
$$(1+\omega)^{3n}=(-\omega^2)^{3n}=(-1)^n(\omega^3)^{2n}=(-1)^n$$

となるので

$$\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k=\mathbf{(-1)^n}$$

(3)　与式より

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-(3k+1)}={}_{3n}\mathrm{C}_{3n-1}+{}_{3n}\mathrm{C}_{3n-4}+\cdots\cdots+{}_{3n}\mathrm{C}_2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}=S_2$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　(1)〜(3)より

$$\begin{cases} S_0+S_1+S_2=2^{3n} \\ S_0+\omega S_1+\omega^2 S_2=(-1)^n \\ S_1=S_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} S_0+2S_1=2^{3n} & \cdots\cdots① \\ S_0-S_1=(-1)^n & \cdots\cdots② \\ S_1=S_2 \end{cases}$$

（$\omega+\omega^2=-1$ より）

①＋2×②より

$$3S_0=2^{3n}+2(-1)^n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_0=\frac{1}{3}\{2^{3n}+2(-1)^n\}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。